Konstrukcije, neponištavanja i baze modularnih fomi

Neka je X gornja poluravnina zadana sa $Im(z) > 0$. Na X i na granicu $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ djeluje grupa $SL_2(\mathbb{R})$ putem Möbiusovih transformacija

$$g.z = \frac{az+b}{cz+d}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R}).$$

Diskretna podgrupa $SL_2(\mathbb{Z}) \subset SL_2(\mathbb{R})$ takodjer djeluje. Fundamentalna domena je skup

$$|z| \geq 1, \quad |Re(z)| \leq 1/2.$$

Takav skup nije kompaktan, ali se može kompaktificirati tako da se njemu doda točka ∞ čije okoline su skupovi

$$Im(z) > \epsilon.$$

Na taj način kompaktificirana fundamentalna domena postaje jednodimenzionalna povezana kompleksna monogostrukost (koja se naziva Riemannova ploha) izomorfna s projektivnim pravcem $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Grubo govoreći, modularna forma za $SL_2(\mathbb{Z})$ je holomorfna funkcija $f : X \to \mathbb{C}$ koja je holomorfna i u točki ∞ kojom se kompaktificira fundamentalna domena, što znači da f ima Fourierov razvoj

$$f(z) = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + a_3 q^3 + \cdots, \quad q = \exp(2\pi\sqrt{-1}z),$$

te za koju postoji $m \in \mathbb{Z}$ tako da f zadovoljava slijedeće svojstvo invarijantnost

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^m f(z), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Kaže se da je m težina modularne forme f.

Koeficijenti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ su od izuzetnog interesa u teoriji brojeva i aritmetičkoj algebarskoj geometriji. Ako je $a_0 = 0$, modularna forma naziva se kusp forma. Jedna od osnovnih primjera kusp formi je poznata Ramanujanova Δ–funkcija

$$\Delta(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} = q + \tau(2)q^2 + \tau(3)q^3 + \ldots$$

koja je kuspidalna forma težine 12.

Grupa $SL_2(\mathbb{Z})$ nije jedina diskretna podgrupa od $SL_2(\mathbb{R})$, već samo jedna od Fuchsianovih grupa prve vrste Γ koje dolaze iz toga što grupa $SL_2(\mathbb{R})$ je esencijalno grupa izometrija koje čuvaju orijentaciju na X kada promatramo X kao Poincaréov model hiperboličke ravnine Lobačevskog. Fundamentalna domena za Γ opet se kompaktificira konačnim brojem točaka u beskonačnosti. Na taj način dolazimo dolazimo do kompaktne Riemannove plohe $\mathfrak{R}_\Gamma$ (ovaj put možemo dobiti bilo koju kompaktnu Riemannovu plohu). Možemo definirati prostore modularnih formi $M_m(\Gamma)$ težine m i njegov potprostor kusp formi $S_m(\Gamma)$. Za primjene u teoriji brojeva, matematičkoj fizici te kompleksnoj i aritmetičkoj algebarskoj geometriji od interesa je razumjeti strukturu tih prostora i to je predmet istraživanja velikog broja matematičara s raznih točaka gledanja.

U ovom predavanju ćemo na jednostavan način pokušati objasniti konstrukcije modularnih formi, baza prostora $S_m(\Gamma)$ te kako geometrija Riemmanove plohe $\mathfrak{R}_\Gamma$ pomaže analitičkom rezoniranju za dobivanje eksplicitnih rezultata neponištavanja. Od slušača se pretpostavlja samo predznanje analize i linearne algebre na nivou preddiplomskog studija matematike, nikakvo predznanje iz geometrije nije potrebno.